NUMERICKÉ ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH ROVNIC – II. část (Newtonova metoda, metoda sečen)

NEWTONOVA METODA (METODA TEČEN)

- Hledáme kořen $\hat{x} \in \langle a, b\rangle$ rovnice $f(x) = 0$.
- Musí být splněny **Fourierovy podmínky**:

  a) funkce f, f', f'' jsou spojité na $\langle a, b\rangle$

  b) $f(a) \cdot f(b) < 0$

  c) f', f'' nemění znaménko v $\langle a, b\rangle$ a $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in \langle a, b\rangle$

- Počáteční aproximaci x_0 volíme:

$$x_0 = a \quad \Leftrightarrow \quad f(a) \cdot f''(a) > 0$$
$$x_0 = b \quad \Leftrightarrow \quad f(b) \cdot f''(b) > 0$$

- x_{i+1} je průsečík tečny grafu funkce $f(x)$ v bodě $[x_i, f(x_i)]$ s osou x , tj.

$$\boldsymbol{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$$

  $\rightarrow$ v každém kroku potřebujeme $f(x_i)$ a $f'(x_i)$

- **Podmínka ukončení:** $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$

METODA SEČEN

- Modifikace Newtonovy metody – tečnu nahradíme sečnou
- x_{i+1} je průsečík sečny grafu funkce $f(x)$ procházející body $[x_{i-1}, f(x_{i-1})]$ a $[x_i, f(x_i)]$ s osou x, tj.

$$\boldsymbol{x_{i+1} = x_i - f(x_i) \cdot \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})}}$$

  $\rightarrow$ v každém kroku stačí spočítat jen $f(x_i)$

- Dva startovací body x_0, x_1:
  - x_0 zvolíme (viz Newtonova metoda)
  - x_1 spočítáme Newtonovou metodou

Příklad: Aproximujte kladný kořen $\hat{x} \in \langle 1, 2 \rangle$ rovnice $x + \mathrm{e}^{-x} - 2 = 0$ s chybou menší než $\varepsilon = 0,01$. (Zaokrouhlujte na 4 desetinná místa.)

Newtonova metoda:

$f(x) = x + \mathrm{e}^{-x} - 2$ $f(1) = -0,6321$ $f(2) = 0,1353$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

Fourierovy pomínky:

a)

b)

c)

Volba x_0:

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$\lvert x_i - x_{i-1} \rvert$
0				
1				
2				

Metoda sečen:

i	x_i	$f(x_i)$	$\lvert x_i - x_{i-1} \rvert$
0	2	$0,1353$	/
1	$1,8435$	$0,0018$	$0,1565$
2			